26 Équations différentielles linéaires

26.A Questions de cours :

1. Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions par le wronskien
2. En admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, montrer que l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y$ est un espace vectoriel de dimension n où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$
3. Résolution de $y' = a(t)y + b(t)$ où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ lorsque l'on connait une base de solutions de l'équation homogène associée.

26.B Exercices :

Exercice 1: ** Lemme de Gronwall

(a) Soient t_0 un réel, u_1 un réel strictement positif et f une application de $[t_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue. Soient ϕ_1 la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t)y, \\ y(t_0) = u_1, \end{cases}$$

et ϕ une application de $[t_0, +\infty[$ dérivable, telle que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$ et $\phi(t_0) \leq u_1$. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi_1(t)$.

(b) Soient u et v des applications continues de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives et C un réel tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds.$$

Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right).$$

Exercice 2: * Résolution EDL de degré 3**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$$

Exercice 3: * Histoires de parités et de périodicité**

1. Soit ψ une solution sur $\mathbb{R}$ de $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ avec a et b deux fonctions impaires. Montrer que ψ est paire.
2. On considère l'équation différentielle :

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = d(t)$$

avec a, b, c, d définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques et a ne s'annule pas.
Montrer que ψ est solution de cette équation différentielle si et seulement si $\psi(0) = \psi(2\pi)$ et $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$.

Exercice 4: *** Solutions maximales à un problème de Cauchy

Etudier les éventuelles solutions maximales au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \left|x + \mathrm{e}^t\right|, \\ x(0) = -1, \\ \frac{dx}{dt}(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 5: *** Utilisation des séries entières 1

Déterminer des solutions de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0,$$

développables en série entière au voisinage de 0.
En déduire la forme générale des solutions sur $]-1,1[$.

Exercice 6: ** Quelle régularité vous dîtes ?

Déterminer les éléments f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tels que pour tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 7: *** Transport de la limite

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f + f' + f''$ admet 2026 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 2026 comme limite en $+\infty$.

Exercice 8: *** Signe du coefficient

Soit a un réel, et b une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue bornée. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay + b(t).$$

On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

Exercice 9: Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{K})$

Soit Φ un élément de $\mathcal{C}^0(GL_n(\mathbb{K}), \mathbb{R})$, telle que pour tout t et pour tout s réels, $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = \exp(tA).$$

Exercice 10:

Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

où p et q sont des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues.

1. Montrer que les zéros de f sont isolés.
2. Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g. On pourra étudier le signe du wronskien de f et g. On représentera les orbites de (12), on interprétera géométriquement w et on justifiera l'idée de son emploi.

Exercice 11:

Soit l'ensemble S des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1. Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0)=1$ et que f est paire.
2. Soit f un élément de S non nul et soit deux fois dérivable. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$

3. Déterminer S.

Exercice 12:

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue intégrable, on considère l'équation différentielle $y''+f(t)y=0$.

1. Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit y_1, y_2 deux solutions. Montrer que leur déterminant wronskien

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

est constant.

3. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

Exercice 13: ** Utilisation des séries entières 2 + abaissement du degré

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(t^2+t)y''+(3t+1)y'+y=0. \tag{1}$$

Existe-il des solutions globales à (17) ?

(Indication : On regardera d'abord les solutions développables en série entières puis on utilisera la méthode d'abaissement du degré

Exercice 14: *** Utilisation des séries entières 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développer f en série entière au voisinage de 0.

Exercice 15: ** Système différentiel 1

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\\ \psi\end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\phi' & = & \phi+\chi+2\psi \\ 2\chi' & = & \phi+\chi-2\psi \\ 2\psi' & = & -\phi+\chi+4\psi \end{array}\right.$$

Exercice 16: ** Système différentiel 2

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}$$